3 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Метод итераций

Рассматривается система

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{15}$$

Считаем, что $a_{i,i} \neq 0$ (i=1,2,…..,n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Разрешим первое уравнение (15) относительно x_1, второе относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + ... + \alpha_{2n}x_n \\ ---------- \\ x_n = \beta_n + \alpha_{12}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + ... + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases} \tag{16}$$

где $\beta_i = \dfrac{b_{ij}}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$, при $i \neq j$

$\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$,

$i, j = 1,2,3,...,n$

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Систему (16) можно записать в виде

$$\vec{x} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x} \qquad (16')$$

Систему $(16')$ будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимаем, например,

$\vec{x}^{(0)} = \vec{\beta}$. Далее последовательно строим:

$\vec{x}^{(1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(0)}$ (первое приближение)

$\vec{x}^{(2)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(1)}$ (второе приближение) и т.д.

- - - - - - - - - - - - -

$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}^{(k)}$ (k=0,1,2,…..)(17)

Если последовательность приближений $\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, ..., \vec{x}^{(k)}, ...$ имеет предел $\vec{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}$, то этот предел является решением системы (16), действительно: $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k+1)} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}^{(k)}$

$\vec{x} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}$, т.е. $\vec{x}$ удовлетворяет $(16')$, следовательно, и (15).

Напишем формулы приближений:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_j^{(k)} \\ \alpha_{ii} = 0 \end{cases} \qquad (17')$$

i=1,…,n; k=0,1,2,…

Вообще говоря, требования $\alpha_{ii} = 0$ можно снять.

Метод последовательных приближений, определяемых формулой (17) или $(17')$ носит название метода итераций (или метод Якоби). Процесс итераций хорошо сходится, если элементы матрицы α малы по абсолютной величине. Иными словами модули диагональных коэффициентов системы (15) должны быть велики по сравнению с модулями недиагональных коэффициентов этой системы.

Пример.

$$\begin{cases} 4x_1+0.2x_2-0.08x_3=8 \\ 0.09x_1+3x_2-0.15x_3=9 \\ 0.04x_1-0.08x_2+4x_3=20 \end{cases}$$

Результат.

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

Замечания. Необязательно брать $\vec{x}^0 = \vec{\beta}$, а можно взять произвольный. Сходящийся процесс итерации обладает важным свойством самоисправляемости, т.е. отдельная ошибка в вычислениях не отразится на конечном результате.

Теорема. Если для приведенной системы (16) выполнено по меньшей мере одно из условий

1) $\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1$ (i=1,2,…..,n)

или

2) $\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1$ (j=1,2,…..,n)

то процесс итераций (17) сходится к единственному решению этой системы, независимо от выбора начального приближения.

3.2 Приведение линейной системы к виду, удобному для итераций

Теорема сходимости накладывает жесткие условия на коэффициенты данной линейной системы $A\vec{x} = \vec{b}$.

Однако, если detA≠0, то с помощью линейного комбинирования уравнений системы её можно заменить эквивалентной системой $\vec{x} = \vec{\beta} + \alpha \cdot \vec{x}$, такой, что условия теоремы сходимости всегда будут выполнены.

Действительно, умножим (15) на матрицу $D = A^{-1} - \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_{ij}$ - матрица с малыми по модулю элементами: $(A^{-1} - \varepsilon)A\vec{x} = D\vec{b}$

$$\vec{x} - \varepsilon A\vec{x} = D\vec{b} \quad \Rightarrow \vec{x} = \beta + \alpha\vec{x},$$

где $\alpha = \varepsilon A$ и $\beta = D\vec{b}$. Если $|\varepsilon_{ij}|$ достаточно малы, то очевидно, что система (17) удовлетворяет условиям теоремы сходимости.

Пример.

А $2x_1+9x_2-4x_3+x_4-3=0;$

Б $x_1-2x_2-5x_3-x_4-2=0;$

В $5x_1-3x_2+x_3-4x_4-1=0;$

Г $10x_1+2x_2-x_3+2x_4+4=0;$

В качестве 1 удобно взять Г.

В качестве 3 удобно взять Б.

В качестве 2 удобно взять А-Б.

В качестве 4 удобно взять 2А-Б+2В-Г.

3.3 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой некоторую модификацию метода итераций. Основная его идея заключается в том, чтобы при выполнении k+1-го приближения переменной x_i учитываются уже вычисленные ранее (k+1)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$, $x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i$ (i=1,2,…,n),произвольно выбираем $x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$. Далее, предполагая, что k-е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить (k+1)-е приближения последующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \cdot x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} \cdot x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^k$$

- - - - - - - -

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

- - - - - - - -

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} \cdot x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}$$

(k=0,1,2,…)

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но, вообще говоря, он приводит к более громоздким вычислениям.

Пример.

$10x_1+x_2+x_3=12$

$2x_1+10x_2+x_3=13$

$2x_1+2x_2+10x_3=14$

$x_1=1.2-0.1x_2-0.1x_3$

$x_2=1.3-0.2x_1-0.1x_3$

$x_3=1.4-0.2x_1-0.2x_2$

$x_1^{(0)}=1,2 \quad x_2^{(0)}=0 \qquad x_3^{(0)}=0$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1,2	0	0
1	0,2	1,06	0,948
2	0,9992	1,0054	0,9991
3	0,9996	1,0001	1,0001
4	1	1	1

3.4 Каноническая форма одношаговых итерационных методов

Каноническая форма итерационных методов имеет вид:

$$B_{n+1}\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau_{n+1}}+Ax_n=\vec{f}, n=0,1,...,n_0 \qquad (18)$$

где B_{n+1} - матрица, задающая тот или иной итерационный метод, τ_{n+1} - итерационный параметр.

Предполагается, что задано начальное приближение x_0 и что существуют матрицы B_n^{-1}, $n=1,2,...,n_0-1$.Тогда из уравнения (18) можно последовательно определить все $x_n, n=1,2,...,n_0$.Для нахождения x_{n+1} по известным f и x_n достаточно решить систему уравнений:

$B_{n+1}x_{n+1}=F_n$

где $F_n=(B_{n+1}-\tau_{n+1}A)x_n+\tau_{n+1}f$

Итерационный метод называется явным, если $B_n=E$, и неявным, если $B_n\neq E$ как правило, неявные итерационные методы имеет смысл применять лишь в том случае, когда каждую матрицу B_n обратить легче, чем исходную матрицу A.

Итерационный метод называют стационарным, если $B_n=B$ и $\tau_{n+1}=\tau$ не зависит от номера итерации, и не стационарным в противоположном случае.

3.5 Матричная запись методов итерации и Зейделя

Пусть $A = A_1 + D + A_2$, где D–диагональматрице A_1–нижняя треугольная, A_2–верхняя треугольная.

Тогда систему (15) можно представить в виде:

$$(A_1 + D + A_2)\vec{x} = \vec{f} \Rightarrow D\vec{x} = -A_1\vec{x} - A_2\vec{x} + \vec{f} \Rightarrow \vec{x} = -D^{-1}A_1\vec{x} - D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{f} \quad (19)$$

Тогда метод итерации выглядит так:

$$\vec{x}^{n+1} = -D^{-1}A_1\vec{x} - D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{f} \text{ или } D\vec{x}^{n+1} + (A_1 + A_2)\vec{x}^n = \vec{f} \quad (20)$$

Метод Зейделя записывается в виде:

$$\vec{x}^{n+1} = -D^{-1}A_1\vec{x} - D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{f} \text{ или } (D + A_1)\vec{x}^{n+1} + A_2\vec{x}^n = \vec{f} \quad (21)$$

Учитывая, что $A = A_1 + D + A_2$ получим что (19),(20) можно записать в виде:

$D(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n) + A\vec{x}^n = \vec{f}$,

$(D + A_i)(\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n) + A\vec{x}^n = \vec{f}$,

из этой записи видно, что если итерационный метод сходится, то он сходится к решению исходной системы уравнений.

Очень часто для ускорения сходимости в итерационные методы входят числовые параметры, которые зависят, вообще говоря, от номера итерации:

$$D\frac{\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n}{\tau_{n+1}} + A\vec{x}^n = f$$

$$(D + A_1)\frac{\vec{x}^{n+1} - \vec{x}^n}{\tau_{n+1}} + A\vec{x}^n = f$$

Способ выбора итерационных параметров выясняется при исследовании сходимости.

В теории итерационных методов существует два круга вопросов:

а) при каких значениях параметров метод сходится

б) при каких значениях параметров сходимость будет наиболее быстрой (соответственно параметры называются отрицательными).

Кроме выше указанных, используются и многошаговые итерационные методы, в которых $\vec{x}^{n+1}$ определяется через значения $\vec{x}^n$ на двух и более предыдущих итерациях т.е. $\vec{x}^{n+1} = F(\vec{x}^n, \vec{x}^{n-1}, ..., \vec{x}^{n-e})$.